

Analisi Matematica II : I prova intermedia
Corso prof. OMARI
A.a. 2003–2004.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i n^3}{i + 3^n}.$$

RISULTATO

La serie è (assolutamente) convergente.

SVOLGIMENTO

Posto

$$a_n = \frac{i n^3}{i + 3^n},$$

si ha

$$|a_n| = \frac{n^3}{\sqrt{1 + 9^n}}.$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \sqrt{\frac{1+9^n}{1+9^{n+1}}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{3},$$

il criterio del rapporto implica che la serie è assolutamente convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{2x} e^{3t^2} dt.$$

(i) Si sviluppi f in serie di Taylor–Maclaurin.

Poiché la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

converge a e^u per ogni $u \in \mathbb{R}$, si ha, posto $u = 3t^2$,

$$e^{3t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} t^{2n}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per il teorema di integrazione a termine a termine delle serie di potenze, si ottiene per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2x} e^{3t^2} dt &= \int_0^{2x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \left(\int_0^{2x} t^{2n} dt \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

(ii) Si determini il raggio di convergenza dello sviluppo.

Poiché la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, il raggio di convergenza è $R = +\infty$.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si studi il carattere della serie di numeri reali

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}.$$

RISULTATO

La serie è semplicemente convergente.

SVOLGIMENTO

Poiché

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})},$$

si constata subito che la successione

$$\left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} \right)_n$$

ha il termine generale positivo, è decrescente ed è infinitesima. Pertanto la serie con i termini di segno alternato

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}.$$

verifica le condizioni del criterio di Leibniz e quindi converge. Inoltre essendo

$$\text{ord}_{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) = \text{ord}_{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n} \sqrt{n}} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}.$$

è divergente, in base al criterio dell'ordine di infinitesimo. Si conclude allora che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}.$$

è semplicemente convergente.